

Министерство науки и высшего образования РФ  
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»  
Факультет математики, информационных и авиационных технологий

Е.А. Сутыркина

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«Случайные процессы в задачах обработки информации»**

Ульяновск, 2021

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Моделирование информационных процессов» / составитель: Е.А. Сутыркина. – Ульяновск: УлГУ, 2021. Настоящие методические указания предназначены для студентов специалитета по специальностям 10.05.01 и 10.05.03 очной формы обучения. В работе приведены литература по дисциплине, основные темы курса, контрольные вопросы и задания в рамках каждой темы, а также указания к выполнению лабораторных работ. Рекомендуется студентам очной формы обучения при подготовке к зачету по данной дисциплине.

Методические указания рекомендованы к введению в образовательный процесс решением Ученого Совета ФМИиАТ УлГУ (протокол 4/21 от 18 мая 2021г.)

## Содержание

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ .....	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ .....	5
Раздел 2. Моделирование случайных чисел и случайных процессов .....	5
Раздел 3. Системы массового обслуживания и их моделирование .....	11
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ .....	19

## **ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **основная**

1. Кулаичев А.П. Методы и средства комплексного анализа данных. Форум / А.П. Кулаичев. – М.: ИНФРА–М, 2006.–512с.
2. Информационная безопасность систем организационного управления. Теоретические основы: в 2 т. / Н.А. Кузнецов, В.В. Кульба, Е.А. Микрин и др. –М.: Наука, 2006.– Т.1. – 495 с.; Т.2. – 437 с

### **дополнительная**

1. Основы информационной безопасности / Е.Б. Белов и др. – М.: Горячая линия–Телеком, 2006.–544 с.
2. Семаков С.Л. Случайные процессы: введение в теорию и приложения. М.: Финакадемия, 2011.
3. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009.

### **Учебно-методическая**

1. Сутыркина Е. А. Методические указания к самостоятельной работе студентов по дисциплине «Случайные процессы в задачах обработки и защиты информации» / Е. А. Сутыркина; УлГУ, ФМИиАТ. - Ульяновск : УлГУ, 2021

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

## Раздел 2. Моделирование случайных чисел и случайных процессов

### *Задачи*

1. Случайный процесс описывается функцией  $y = x \cdot e^{-t}$ ,  $t > 0$ ,  $x$  – случайная величина, распределенная равномерно в интервале  $(-1, 1)$ . Построить графики плотностей распределения вероятностей процесса  $y(t)$  в моменты времени  $t=0$ ,  $t=1$ ,  $t=2$ .

### *Решение*

Учитывая, что площадь плотности распределения вероятностей равна единице и вид ее при разных значениях  $t$  сохраняется, будем иметь:

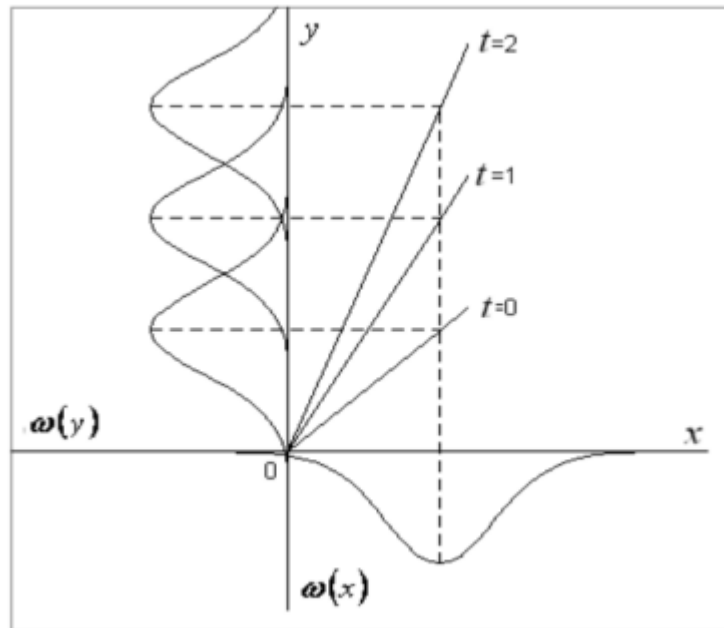
$$t = 0, \omega(y) = 0,5, y \in (-1; 1); \quad t = 1, \omega(y) = 1,38, y \in (-0,37; 0,37);$$

$$t = 2, \omega(y) = 3,57, y \in (-0,139; 0,139).$$

2. Случайный процесс формируется случайной величиной в соответствии с выражением  $y = at + x$ , где  $x$  – случайная нормально распределенная величина с математическим ожиданием  $m_x = 0$  и среднеквадратическим отклонением  $\sigma_x = 1$ ,  $a$  – постоянная величина, которая  $> 0$ ,  $t$  – время. Построить графики плотностей распределения  $\omega[y(t)]$  при  $t=0$ ,  $t=1$ ,  $t=2$ .

### *Решение*

Графики строятся в трех квадрантах  $\omega(x) - x$ ;  $x - y$ ;  $y - \omega(y)$  при разных значениях  $t$ . При  $t=0$   $\omega(y)$  полностью соответствует исходному распределению  $\omega(x)$ . В остальные моменты времени плотность распределения вероятностей смещается по оси  $y$  (меняется  $m_y$ ), дисперсия  $\sigma_y^2 = \sigma_x^2$  остается неизменной.



3. Случайный процесс описывается выражением вида  $y(t) = x \cdot e^{-t}$ ,  $t > 0$ ,  $x$  – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами  $m_x, \sigma_x$ . Требуется получить выражения для математического ожидания  $m_y(t)$ , дисперсии  $D_y(t)$ , корреляционной функции  $K_x(t_j, t)$  и плотности распределения вероятностей  $\omega_y(t)$  сформированного процесса  $y(t)$ .

#### Решение

По определению  $m_y(t) = M[y(t)] = M[x \cdot e^{-t}] = e^{-t} \cdot m_x$ ;

$$D_y(t) = M[y(t) - m_y(t)]^2 = M[x \cdot e^{-t} - m_x \cdot e^{-t}]^2 = e^{-2t} \cdot \sigma_x^2;$$

$$K_y(t_j, t) = M\left[ \overset{\circ}{y}(t) \cdot \overset{\circ}{y}(t_j) \right] = \left[ \overset{\circ}{x} e^{-t} \cdot \overset{\circ}{x} e^{-t_j} \right] = e^{-(t+t_j)} \cdot \sigma_x^2;$$

$$\omega_y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x e^{-t}}} \cdot \exp\left[ -\frac{(y(t) - m_y(t))^2}{2\sigma_y^2(t)} \right].$$

### Задача

Случайный процесс  $z(t)$  образован суммой независимых случайного процесса  $x(t)$  и детерминированной функции  $s(t)$ , причем процесс  $x(t)$  характеризуется следующими параметрами:  $m_x(t) = a = \text{const}$ ,  $\sigma_x(t) = \sigma_x = \text{const}$ , а функция  $s(t)$  имеет вид  $s(t) = s_0 \cdot e^{-\alpha t}$ . Требуется провести классификацию процессов  $z(t)$  и  $x(t)$ .

### Решение

Отсутствует информация о корреляционной функции процесса  $x(t)$ . Поэтому отнести этот процесс к стационарной или нестационарной функции не представляется возможным.

Математическое ожидание процесса  $z(t)$

$$m_z(t) = a + s_0 e^{-\alpha t}$$

зависит от времени, процесс – нестационарный.

### Задачи

1. Источник информации генерирует колокольные импульсы вида  $e^{-\beta^2 t^2}$ , которые через фильтр с частотой среза  $f_{\text{max}}$  подлежат записи в память ПЭВМ. Определить интервал дискретизации сигнала  $\Delta t$ , если допустимая относительная погрешность последующего его восстановления не должна превышать 10%, а  $\beta = 20 \text{ с}^{-1}$ .

### Решение

В соответствии с (1.4) спектральная плотность колокольного импульса

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 t^2} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \cdot \exp(-0,5\omega^2 / \beta^2).$$

Принимая во внимание известное соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \int_0^{\infty} \exp(-0,5\omega^2 / \beta^2) df, \quad \omega = 2\pi f$$

и умножая числитель и знаменатель в выражении (1.17) на  $1/\sqrt{2\pi\beta^2}$ , получим

$$\sigma = \left[ \left( \int_{f_{\max}}^{\infty} S(f) df \right) / \left( \int_0^{\infty} S(f) df \right) \right] = 2\pi [1 - \Phi(2\pi f_{\max} / \beta)],$$

где  $\Phi(z)$  – функция Крампа.

Учитывая, что  $\delta = 0,1$ , известным способом определяем аргумент функции Крампа:  $(2\pi f_{\max} / \beta) = 2,4$ . При  $\beta = 20$  и  $f_{\max} = 24 / \pi$  получим  $\Delta t = (1/2 f_{\max}) = 6,56 \cdot 10^{-2}$  с.

2. Найти относительную погрешность представления случайного синхронного двоичного сигнала рядом Котельникова при произвольной граничной частоте. Определить погрешность представления  $\delta$ , если граничная частота выбирается равной  $f_3$ .

#### *Решение*

Известно, что спектр случайного синхронного телеграфного сигнала описывается формулой

$$S(f) = h^2 t \frac{\sin^2 \pi f T}{(\pi f T)^2},$$

где  $T$  – длительность посылки;  $h$  – ее амплитуда.

Подставляя это выражение в формулу (1.17), получим



$$\delta = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin^2 \pi f T}{\pi f T} + 0,5\pi - \sin(2\pi f T) \right],$$

где  $\sin x = \int_0^x (\sin y / y) dy$  – интегральный синус.

При  $f = f_3$ , учитывая, что  $f_3 \cdot T = 0,5$ , будем иметь  $\delta = 2[(2/\pi) + 0,5\pi - \sin \pi] / \pi = 0,23$ . Если  $f = f_3$ , то  $\delta = 2(0,5\pi - \sin 2\pi) / \pi = 0,096$ .

Случайный процесс с корреляционной функцией  $K(\tau) = K(0)\exp(-\alpha|\tau|)$  дискретизирован с шагом  $\Delta t$ . Найти погрешность представления такого процесса рядом Котельникова в зависимости от параметров  $\alpha$  и  $\Delta t$ .

### *Решение*

Энергетический спектр случайного процесса

$$S(f) = 2\alpha K(0) / (\alpha^2 + \omega^2), \quad \omega = 2\pi f.$$

При ограничении полосы такого спектра частотой  $f_{\max}$  погрешность  $\delta = 1 - (2/\pi) \arctg(2\pi f_{\max} / \alpha)$ .

Принимая  $f_{\max} = 0,5\Delta t$ , найдем  $\delta = 1 - (2/\pi) \arctg(\pi / \alpha \Delta t)$ .

### *Задачи*

1. Задан сигнал  $\Delta B_c$  на фоне аддитивной помехи  $B_{ш}$  с нормальным распределением, характеризуемым нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma^2$ . Метод обнаружения – однократный отсчет, цены ошибок равны, априорная вероятность появления сигнала – 0,5.

Требуется установить порог принятия решений.

### Решение

Плотность распределения помехи и суммы сигнала и помехи соответственно записываются для сформулированной задачи в виде

$$p_0(B_{ш}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-B_{ш}^2 / 2\sigma^2); \quad p_1(B_{ш}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(B_{ш} - \Delta B_c)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Байесово правило при заданных априорных вероятностях и ценах ошибок дает  $B_{П} = \Delta B_c / 2$ . При применении критерия Неймана-Пирсона порог принятия решений находится из уравнения

$$\int_{B_{П}}^{\infty} p_0(B_{ш}) dB = \Delta_{\varepsilon},$$

решение которого через функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz$$

имеет вид

$$\Delta_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi\left( \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\Delta B_c^2}{\sigma^2} \frac{B_{П}}{\Delta B_c}} \right) \right].$$

На рис. 1.7 приведены графики зависимости  $B_{П} / \Delta B_c$  от  $\Delta_{\varepsilon}$  при нескольких значениях  $\Delta B_c / \sigma$ . Задаваясь ошибкой  $\Delta_{\varepsilon}$  и отношением сигнал/шум  $\Delta B_c / \sigma$ , получаем относительный порог  $B_{П} / \Delta B_c$ . Например,  $\Delta_{\varepsilon} = 10^{-3}$ ,  $\Delta B_c / \sigma = 3,3$ . Тогда  $B_{П} / \Delta B_c = 1$ . При  $\Delta_{\varepsilon} = 0,1$  и  $\Delta B_c / \sigma = 3,3$   $B_{П} = \Delta B_c / 2$ .

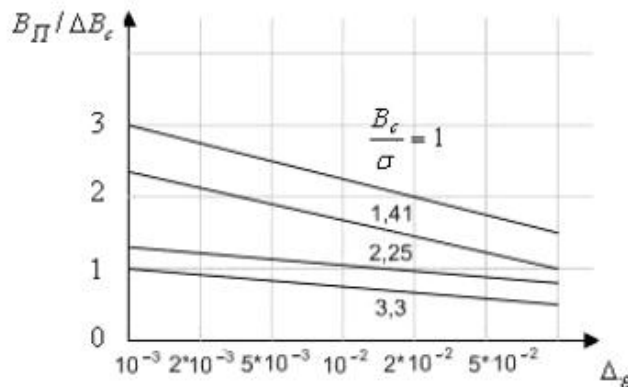


Рис. 1.7. Зависимость относительного порога от ошибки первого рода

### Раздел 3. Системы массового обслуживания и их моделирование

Очень удобно описывать появление случайных событий в виде вероятностей переходов из одного состояния системы в другое, так как при этом считается, что, перейдя в одно из состояний, система не должна далее учитывать обстоятельства того, как она попала в это состояние.

Случайный процесс называется **марковским процессом** (или **процессом без последствия**), если для каждого момента времени  $t$  вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящем и не зависит от того, как система пришла в это состояние.

Итак, марковский процесс удобно задавать графом переходов из состояния в состояние. Мы рассмотрим два варианта описания марковских процессов — с **дискретным и непрерывным временем**.

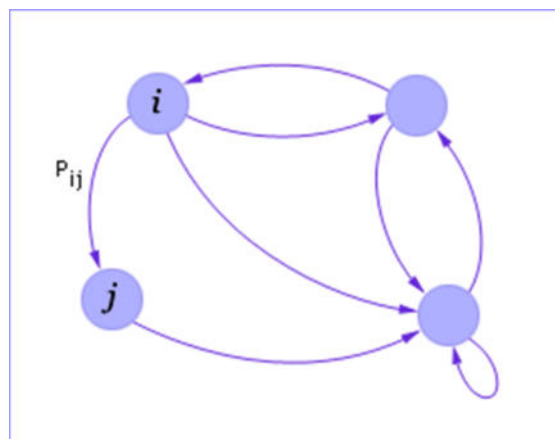
В первом случае переход из одного состояния в другое происходит в заранее известные моменты времени — такты (1, 2, 3, 4, ...). Переход осуществляется на каждом такте, то есть исследователя интересует только последовательность состояний, которую проходит случайный процесс в своем развитии, и не интересует, когда конкретно происходил каждый из переходов.

Во втором случае исследователя интересует и цепочка меняющихся друг друга состояний, и моменты времени, в которые происходили такие переходы.

И еще. Если вероятность перехода не зависит от времени, то марковскую цепь называют **однородной**.

#### Марковский процесс с дискретным временем

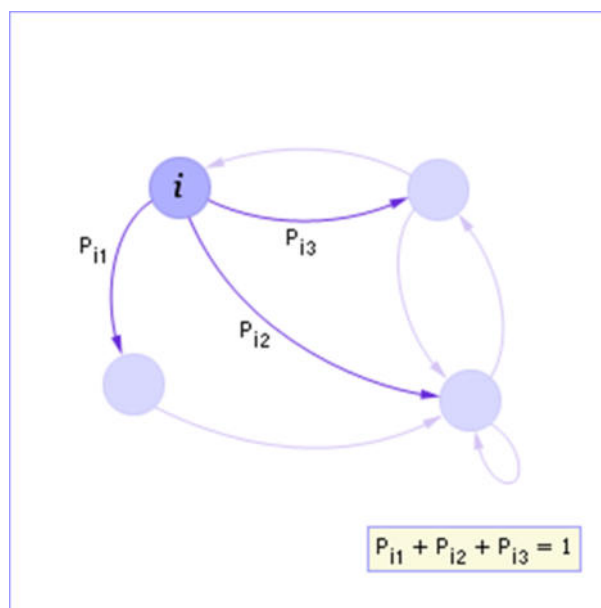
Итак, модель марковского процесса представим в виде графа, в котором состояния (вершины) связаны между собой связями (переходами из  $i$ -го состояния в  $j$ -е состояние), см. **рис. 3.1**.



**Рис. 3.1. Пример графа переходов**

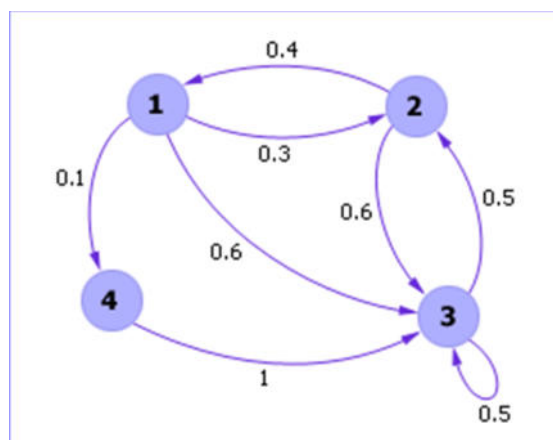
Каждый переход характеризуется **вероятностью перехода**  $P_{ij}$ . Вероятность  $P_{ij}$  показывает, как часто после попадания в  $i$ -е состояние осуществляется затем переход в  $j$ -е состояние. Конечно, такие переходы происходят случайно, но если измерить частоту переходов за достаточно большое время, то окажется, что эта частота будет совпадать с заданной вероятностью перехода.

Ясно, что у каждого состояния сумма вероятностей всех переходов (исходящих стрелок) из него в другие состояния должна быть всегда равна 1 (см. [рис. 3.2](#)).



**Рис. 3.2. Фрагмент графа переходов (переходы из  $i$ -го состояния являются полной группой случайных событий)**

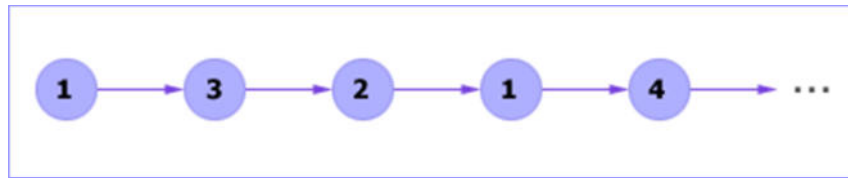
Например, полностью граф может выглядеть так, как показано на [рис. 3.3](#).



**Рис. 3.3. Пример марковского графа переходов**

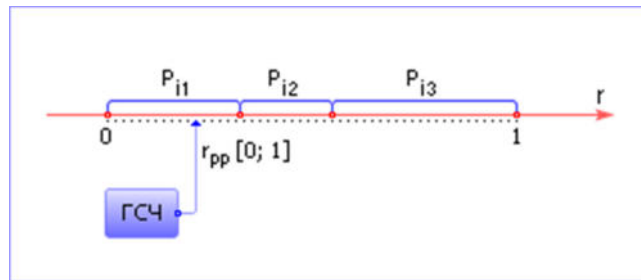
Реализация марковского процесса (процесс его моделирования) представляет собой вычисление последовательности (цепи) переходов из

состояния в состояние (см. [рис. 3.4](#)). Цепь на [рис. 3.4](#) является случайной последовательностью и может иметь также и другие варианты реализации.



**Рис. 3.4. Пример марковской цепи, смоделированной по марковскому графу, изображенному на рис. 33.3**

Чтобы определить, в какое новое состояние перейдет процесс из текущего  $i$ -го состояния, достаточно разбить интервал  $[0; 1]$  на подынтервалы величиной  $P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, \dots$  ( $P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} + \dots = 1$ ), см. [рис. 3.5](#). Далее с помощью ГСЧ надо получить очередное равномерно распределенное в интервале  $[0; 1]$  случайное число  $r_{pp}$  и определить, в какой из интервалов оно попадает (см. [лекцию 23](#)).



**Рис. 33.5. Процесс моделирования перехода из  $i$ -го состояния марковской цепи в  $j$ -е с использованием генератора случайных чисел**

После этого осуществляется переход в состояние, определенное ГСЧ, и повтор описанной процедуры для нового состояния. Результатом работы модели является марковская цепь (см. [рис. 3.4](#)).

**Пример. Имитация стрельбы из пушки по цели.** Для того, чтобы проимитировать стрельбу из пушки по цели, построим модель марковского случайного процесса.

Определим следующие три состояния:  $S_0$  — цель не повреждена;  $S_1$  — цель повреждена;  $S_2$  — цель разрушена. Зададим вектор начальных вероятностей:

	$S_0$	$S_1$	$S_2$
$P_0$	0.8	0.2	0

Значение  $P_0$  для каждого из состояний показывает, какова вероятность каждого из состояний объекта до начала стрельбы.

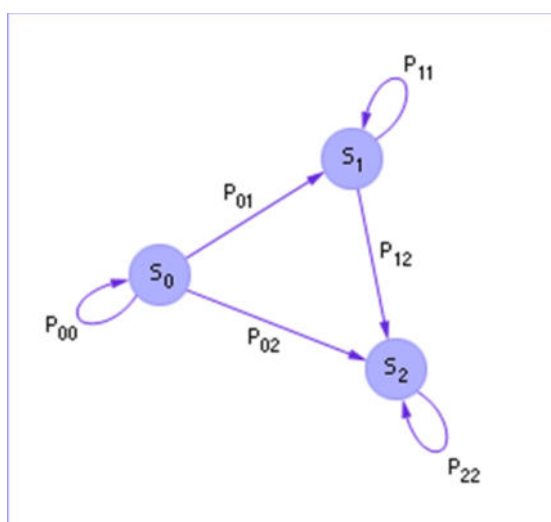
Зададим матрицу перехода состояний (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1.  
Матрица вероятностей перехода  
дискретного марковского процесса

	В $S_0$	В $S_1$	В $S_2$	Сумма вероятностей переходов
Из $S_0$	0.45	0.40	0.15	$0.45 + 0.40 + 0.15 = 1$
Из $S_1$	0	0.45	0.55	$0 + 0.45 + 0.55 = 1$
Из $S_2$	0	0	1	$0 + 0 + 1 = 1$

Матрица задает вероятность перехода из каждого состояния в каждое. Заметим, что вероятности заданы так, что сумма вероятностей перехода из некоторого состояния в остальные всегда равна единице (куда-то система должна перейти обязательно).

Наглядно модель марковского процесса можно представить себе в виде следующего графа (см. [рис. 3.6](#)).



**Рис. 3.6. Граф марковского процесса, моделирующий стрельбу из пушки по цели**

Используя модель и метод статистического моделирования, попытаемся решить следующую задачу: определить среднее количество снарядов, необходимое для полного разрушения цели.

Проимитируем, используя таблицу случайных чисел, процесс стрельбы. Пусть начальное состояние будет  $S_0$ . Возьмем последовательность из таблицы случайных чисел: 0.31, 0.53, 0.23, 0.42, 0.63, 0.21, ... (случайные числа можно взять, например, из [этой таблицы](#)).

**0.31:** цель находится в состоянии  $S_0$  и остается в состоянии  $S_0$ , так как  $0 < 0.31 < 0.45$ ;

**0.53**: цель находится в состоянии  $S_0$  и переходит в состояние  $S_1$ , так как  $0.45 < \mathbf{0.53} < 0.45 + 0.40$ ;

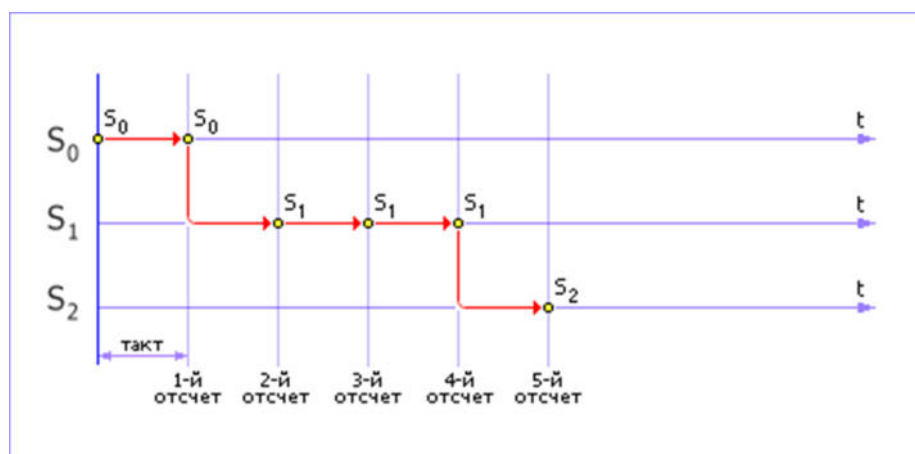
**0.23**: цель находится в состоянии  $S_1$  и остается в состоянии  $S_1$ , так как  $0 < \mathbf{0.23} < 0.45$ ;

**0.42**: цель находится в состоянии  $S_1$  и остается в состоянии  $S_1$ , так как  $0 < \mathbf{0.42} < 0.45$ ;

**0.63**: цель находится в состоянии  $S_1$  и переходит в состояние  $S_2$ , так как  $0.45 < \mathbf{0.63} < 0.45 + 0.55$ .

Так как достигнуто состояние  $S_2$  (далее цель переходит из  $S_2$  в состояние  $S_2$  с вероятностью 1), то цель поражена. Для этого в данном эксперименте потребовалось 5 снарядов.

На **рис. 3.7** приведена временная диаграмма, которая получается во время описанного процесса моделирования. Диаграмма показывает, как во времени происходит процесс изменения состояний. Такт моделирования для данного случая имеет фиксированную величину. Нам важен сам факт перехода (в какое состояние переходит система) и не важно, когда это происходит.



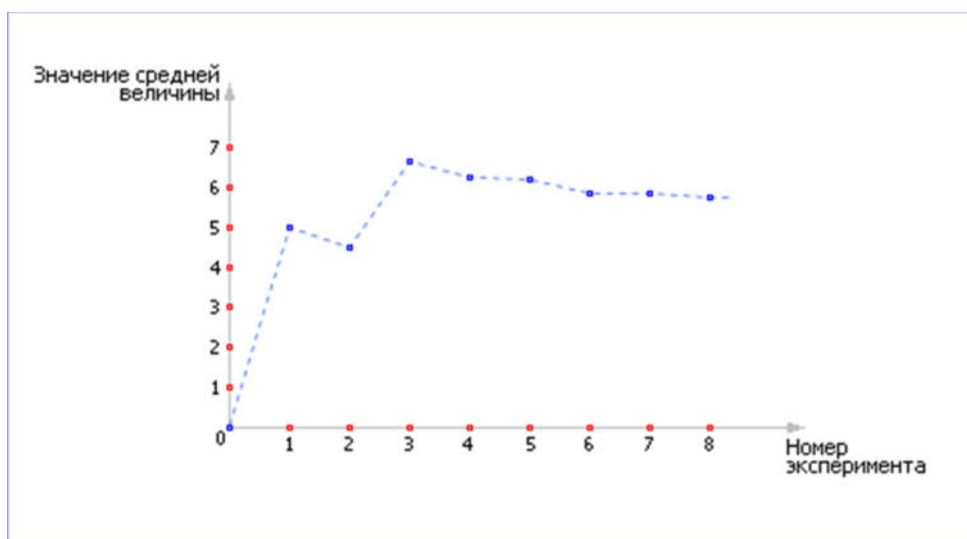
**Рис. 3.7. Временная диаграмма переходов в марковском графе (пример имитации)**

Процедура уничтожения цели совершена за 5 тактов, то есть марковская цепь этой реализации выглядит следующим образом:  $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$ . Конечно, ответом задачи это число быть не может, так как в разных реализациях получатся разные ответы. А ответ у задачи может быть только один.

Повторяя данную имитацию, можно получить, например, еще такие реализации (это зависит от того, какие конкретно случайные числа выпадут): 4 ( $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$ ); 11 ( $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$ ); 5 ( $S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$ ); 6 ( $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$ ); 4 ( $S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$ ); 6 ( $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$ ); 5 ( $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$ ). Всего уничтожено 8 целей. Среднее число циклов в процедуре стрельбы составило:  $(5 + 4 + 11 + 5 + 6 + 4 + 6 + 5)/8 = 5.75$  или, округляя, 6. Именно столько снарядов, в среднем, рекомендуется иметь в боевом запасе пушки для уничтожения цели при таких вероятностях попаданий.

Теперь следует определить точность. Именно точность может нам показать, насколько следует доверять данному ответу. Для этого проследим, как сходится последовательность случайных (приближенных) ответов к правильному (точному) результату. Напомним, что, согласно центральной предельной теореме, сумма случайных величин есть величина неслучайная, поэтому для получения статистически достоверного ответа необходимо следить за средним числом снарядов, получаемых в ряде случайных реализаций.

На первом этапе вычислений средний ответ составил 5 снарядов, на втором этапе средний ответ составил  $(5 + 4)/2 = 4.5$  снаряда, на третьем —  $(5 + 4 + 11)/3 = 6.7$ . Далее ряд средних величин, по мере накопления статистики, выглядит следующим образом: 6.3, 6.2, 5.8, 5.9, 5.8. Если изобразить этот ряд в виде графика средней величины выпущенных снарядов, необходимых для поражения цели, в зависимости от номера эксперимента, то обнаружится, что данный ряд сходится к некоторой величине, которая и является ответом (см. [рис. 3.8](#)).



**Рис. 3.8.** Изменение средней величины в зависимости от номера эксперимента

Визуально мы можем наблюдать, что график «успокаивается», разброс между вычисляемой текущей величиной и ее теоретическим значением со временем уменьшается, стремясь к статистически точному результату. То есть в некоторый момент график входит в некоторую «трубку», размер которой и определяет точность ответа.

Алгоритм имитации будет иметь следующий вид (см. [рис. 3.9](#)).

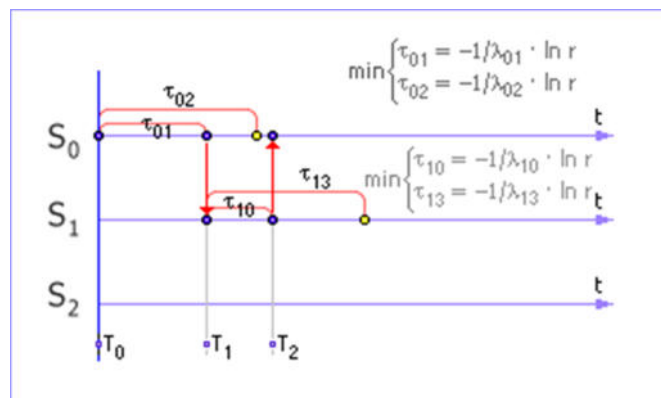
Еще раз заметим, что в вышерассмотренном случае нам безразлично, в какие моменты времени будет происходить переход. Переходы идут такт за тактом. Если важно указать, в какой именно момент времени произойдет переход, сколько времени система пробудет в каждом из состояний, требуется применить модель с непрерывным временем.



**Пример. Моделирование работы станка.** Промоделируем работу станка (см. [рис. 3.10](#)), который может находиться в следующих состояниях:  $S_0$  — станок исправен, свободен (простой);  $S_1$  — станок исправен, занят (обработка);  $S_2$  — станок исправен, замена инструмента (переналадка)  $\lambda_{02} < \lambda_{21}$ ;  $S_3$  — станок неисправен, идет ремонт  $\lambda_{13} < \lambda_{30}$ .

Зададим значения параметров  $\lambda$ , используя экспериментальные данные, получаемые в производственных условиях:  $\lambda_{01}$  — поток на обработку (без переналадки);  $\lambda_{10}$  — поток обслуживания;  $\lambda_{13}$  — поток отказов оборудования;  $\lambda_{30}$  — поток восстановлений.

Реализация будет иметь следующий вид (см. [рис. 3.11](#)).

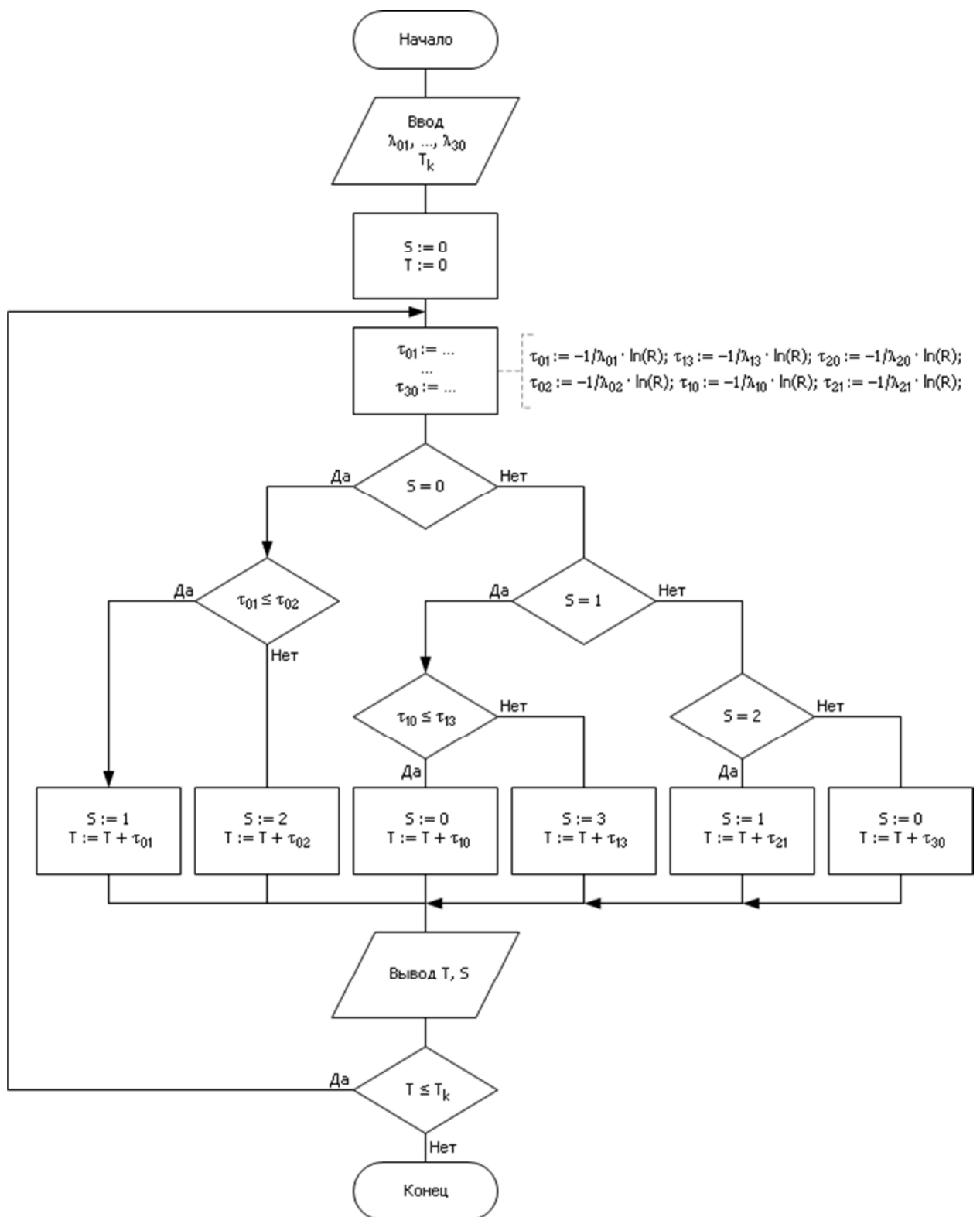


**Рис. 3.11. Пример моделирования непрерывного марковского процесса с визуализацией на временной диаграмме (желтым цветом указаны запрещенные, синим — реализовавшиеся состояния)**

В частности, из [рис. 3.11](#) видно, что реализовавшаяся цепь выглядит так:  $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow \dots$ . Переходы произошли в следующие моменты времени:  $T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow \dots$ , где  $T_0 = 0$ ,  $T_1 = \tau_{01}$ ,  $T_2 = \tau_{01} + \tau_{10}$ .

**Задача.** Поскольку модель строят для того, чтобы на ней можно было решить задачу, ответ которой до этого был для нас совсем не очевиден, то сформулируем такую задачу к данному примеру. Определить долю времени в течение суток, которую занимает простой станка (посчитать по рисунку)  $T_{\text{cp}} = (T + T + T + T)/N$ .

Алгоритм имитации будет иметь следующий вид (см. [рис. 3.12](#)).



**Рис. 3.12. Блок-схема алгоритма моделирования непрерывного марковского процесса на примере имитации работы станка**

Очень часто аппарат марковских процессов используется при моделировании компьютерных игр, действий компьютерных героев.

# ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

## Глава 2

1. Дайте определение нормального СП.
2. Стационарный нормальный СП имеет . Запишите одномерную ПВ производной для момента времени.
3. Дайте определение винеровского процесса.
4. Дайте определение узкополосного нормального СП.
5. Как определяется комплексная огибающая СП? Какие свойства имеет огибающая (комплексная огибающая) СП?
6. Запишите квадратурное представление узкополосного СП.
7. Какие статистические характеристики имеют амплитуды квадратурных составляющих и для узкополосного нормального СП?
8. Какой будет совместная ПВ огибающей и фазы узкополосного СП? Будут ли независимыми СВ?
9. Как изменится ситуация при добавлении к узкополосному нормальному СП гармонического сигнала , где – центральная частота энергетического спектра СП?
10. В чем состоит методика определения совместных ПВ огибающей и фазы для отсчетов, разделенных промежутком ?
11. Что такое функционал плотности вероятности нормального СП?
12. Как выглядит ФПВ для нормального «белого» шума?

## Глава 3

1. Дайте определение марковского процесса.
2. Как определяется простая цепь Маркова?
3. Что такое переходная вероятность?
4. Как определяется матрица перехода за  $n$  шагов?
5. Что такое финальные вероятности?
6. При каких условиях гауссовский процесс будет также Марковским?
7. Какому уравнению удовлетворяет ПВ диффузионного марковского процесса?
8. Как выглядит уравнение Колмогорова–Чепмена для винеровского процесса? Каким будет его решение?